Examen de Análisis Complejo

8 de julio de 1999

1. Sea f una función entera no constante. Dado un número $\rho > 0$, definamos:

$$E_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| < \rho\}, \quad F_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| \le \rho\}.$$

   a) Pruébese que la adherencia de E_ρ es igual a F_ρ.

   b) Justifíquese que en cada componente conexa acotada de E_ρ hay algún cero de f.

2. Pruébese, integrando una conveniente función compleja a lo largo de la poligonal cerrada $\Gamma(a,b) = [a, b, b+2\pi i, a+2\pi i, a]$ $(a < 0 < b)$, que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{\left(e^x+1\right)^2}\, dx = \frac{\pi(1-\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha\pi)}$$

   donde α es un parámetro real tal que $0 < \alpha < 2$ y $\alpha \neq 1$.

   Nota: Para calcular el residuo puede usarse la igualdad $e^z + 1 = -\left(e^{z-i\pi} - 1\right) = (z - i\pi)\varphi(z)$, donde $\varphi(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} 1(n+1)!(z-i\pi)^n$.

3. Hállese el número de ceros del polinomio $P(z) = z^7 - z^4 - 4z + 6$

   a) En el disco $D(0,1)$.

   b) En el semiplano de la derecha.

4. Calcúlense todos los isomorfismos conformes del dominio

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z+1| < \sqrt{2},\ |z-1| < \sqrt{2}\}$$

   sobre el disco unidad que dejan fijo el punto $z = 0$.

5. Sea f una función entera no constante y supongamos que hay un número complejo $\alpha \neq 1$ tal que $f(z) = f(\alpha z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

   a) Pruébese que, $f(z) = f(\alpha^n z)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y todo $z \in \mathbb{C}$, y dedúzcase que, necesariamente, $|\alpha| = 1$.

   b) Justifíquese que el conjunto $\{\alpha^n : n \in \mathbb{Z}\}$ es finito y, por tanto, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha^m = 1$.

   c) Sea m el menor número natural tal que $\alpha^m = 1$. Justifíquese que hay una función entera g tal que $f(z) = g(z^m)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.